Option "Mathématiques" (M')

MATHEMATIQUES III

Durée : 3 heures

Les parties I, II *et* III *sont indépendantes*

N, **Z**, **C** désignent respectivement, l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers relatifs, l'ensemble des nombres complexes.

Dans tout le problème $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, où $a_n \in \mathbf{C}$ et $z \in \mathbf{C}$, désigne une série entière de rayon de convergence 1. On note sa somme $f(z)$ partout où elle existe.

I

1° Supposons que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge et a pour somme S. Si pour $(n, p) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ et $p \geqslant n$ on note $S_{n,p} = a_n + \ldots + a_p$, calculer a_j en fonction des $S_{n,p}$ pour $j \geqslant n$ et en déduire que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ vérifie le critère de Cauchy uniformément pour $z \in [0, 1]$ et que $\lim_{\substack{z \in [0,1] \\ z \to 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = S$.

2° Applications :

Calculer Log 2.

Montrer que la série $\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1}$ converge et a pour somme $\frac{\pi}{4}$.

.../...

3° Montrer que si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge uniformément sur l'arc de cercle $\Gamma = \{z = e^{i\theta} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \leqslant 2\pi\}$, la somme $f(z)$ de cette série est continue sur le secteur

$$\Delta = \{z = \rho e^{i\theta} \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta \leqslant 2\pi\} .$$

4° Montrer par un contre-exemple que la proposition suivante est fausse :

Si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1, de somme $f(z)$ dans le disque de convergence et si $\lim_{\substack{z \in [0,1] \\ z \to 1}} f(z) = A$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est convergente de somme A .

II

1° Soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de nombres complexes telle que $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où $d_n = \dfrac{b_0 + \ldots + b_{n-1}}{n}$ vérifie $\lim_{n \to +\infty} d_n = 0$.

2° Montrer que pour $z \in [0,1]$ on a :

$$|f(z) - \sum_{p=0}^{n} a_p| \leqslant (1-z) \sum_{p=0}^{n} p|a_p| + \frac{1}{n+1} \sum_{n+1}^{+\infty} p|a_p| z^p .$$

En déduire :

a. Si $\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0$ et si $z_n = 1 - \dfrac{1}{n}$

on a $\lim_{n \to +\infty} |f(z_n) - \sum_{p=0}^{n} a_p| = 0$.

b. Si $\lim_{n \to +\infty} n a_n = 0$ et si $\lim_{\substack{z \in [0,1] \\ z \to 1}} f(z) = S$

on a $\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=0}^{n} a_p = S$.

III

1° Calculer $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta$ pour $n \in \mathbf{Z}$.

En déduire que si $r \in [0,1[$

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}$$

et que si f est bornée sur $\{z \ , \ |z| < 1\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

2° On note $s_n(e^{i\theta}) = \sum_{p=0}^{n} a_p e^{ip\theta}$

et $\sigma_n(e^{i\theta}) = \dfrac{s_0(e^{i\theta}) + \ldots + s_n(e^{i\theta})}{n+1}$.

Montrer que $\dfrac{f(z)}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\sigma_n(1) z^n$ pour $|z| < 1$

et que $(n+1)\sigma_n(1) = \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dfrac{f(re^{i\theta}) d\theta}{(1 - re^{i\theta})^2 r^n e^{in\theta}}$ pour $r \in [0,1[$.

3° Montrer que $\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \dfrac{[1 - (re^{i\theta})^{n+1}]^2 - 1}{(1 - re^{i\theta})^2 r^n e^{in\theta}} d\theta = 0$

pour $r \in [0,1[$.

En déduire que si f est bornée par M sur $\{z, |z| < 1\}$ on a :

$$|\sigma_n(1)| \leqslant M$$

$$\text{et} \quad |\sigma_n(e^{i\theta})| \leqslant M .$$

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail